Prof. Dr. Alfred Toth

Von der Kardinalzahl zur Nummer*

1. Im allgemeinen verhalten sich Ordinal- und Kardinalzahlen völlig unähnlich zueinander; z.B. sind auf beide keine Rechengesetze anwendbar, vgl.

$2 + 5 = 7$

$2. + 5. = ?$

Im Unterschied zu den Kardinalzahlen beziehen sich Ordinalzahlen nämlich stets auf eine Reihenfolge, d.h. eine relationale Ordnung, die sich natürlich den Rechenarten entzieht. Man könnte genauso gut fragen: Welches ist die Summe aus einem 2-stelligen und einem 3-stelligen Prädikat/Funktor? Im allgemeinen wäre es vermutlich kein 5-stelliger Funktion, was allein daraus erhellt, dass nach einem Gesetz von Peirce sich alle n-adischen Prädikate mit n > 3 auf triadische Prädikate reduzieren lassen. Wenn wir also explizit fragen würden: Was ist die „Summe“ von „X schlägt Y“ und „Y liegt zwischen X und Z“?, dann wären wir also wohl ratlos. Es wäre auch sehr schwierig, überhaupt ein Beispiel für ein 5-stelliges Prädikat zu finden. Daraus lernt man also

${}^2R + {}^3R = ?$

2. Es liegt in der Natur der Kardinalzahlen, dass sie selbst wie Objekte – und das bedeutet: nicht wie Zeichen – verwandt werden. Man kann nur Objekte und (kardinale) Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren, evtl. potenzieren, sowie zu Mengen, Mengen von Mengen, Mengenfamilien, Klassen usw. zusammenfassen. Mit Zeichen ist das i.a. nicht möglich, ausser etwa, man ersetzt die Grundrechenarten durch die einigermassen korrespondierenden booleschen Operationen und rechnet in Verbänden. Daraus lernen wir

1 Haus + 3 Häuser = 4 Häuser

* Meine bisherigen Arbeiten zum Thema sind alle in meinem „Electronic Journal for Mathematical Semiotics“ erschienen.

3 Häuser – 1 Haus = 2 Häuser

2 Häuser x 2 Häuser = 4 Häuser

4 Häuser : 2 = je 2 Häuser

Statt der Division müssen wir also wohl eine Distribution mit rein kardinalem Divisor annehmen – ein starker Hinweis, dass Zahlen eine Sonderform von Objekten sind. Denn ich kann z.B. sagen: Ich besitze 4 Häuser, möchte sie jetzt aber auf meine 2 Kinder verteilen, so zwar, dass jedes Kind 2 Häuser bekommt. Bei den übrigen Grundrechenarten ergeben sich dagegen keine Probleme: 1 besitze bereits 1 Haus und ersteigere 3 Häuser mehr, dann besitze ich 4 Häuser (Addition). Besitze ich 3 Häuser und stosse ich 1 Haus davon ab, dann bleiben mir noch 2 Häuser (Subtraktion). Wenn ich 2 Häuser in St. Gallen und 2 Häuser in Zürich besitze, dann besitze ich also 4 Häuser (Multiplikation). Der Grund dafür, dass die Division mit reinen Objekten Probleme schafft, mit reinen Zahlen aber nicht, liegt also einfach daran, dass die Vorstellung eines „Inversen eines Objektes (Ω^{-1})“ und die damit einziehende Bruchrechnung seltsam anmuten. Fazit: Zahlen sind somit abstraktere Objekte als die „reinen“ Objekte – nämlich die wohl zutiefst erreichbaren.

3. Damit kehren wir zu den Ordinalzahlen zurück. Sie legen somit nach dem bisher Gesagten nicht nur die Objekte Zahlen, sondern auch ihre relationale Ordnung fest, d.h. erst bei ihnen und nicht bei den ihnen so unverwandten Kardinalzahlen kommt nun der Zeichenbegriff mit der Relation ins Spiel. Dies ist ein **1. Schritt** weg von den nicht-relationalen Kardinal-Zahl-Objekten. In der Tat hatte Bense auf zwei ganz verschiedene Weisen (1975, S. 167 ff.; 1983, S. 192 ff.) gezeigt, dass eine Isomorphie zwischen den ersten drei Ordinalzahlen und den drei numerischen Fundamentalkategorien von Peirce besteht. Wichtiger als der Nachweis der für beide gültigen Induktionsidee ist dabei:

1. $\sigma(n) = n+1$

2. $n < n+1 < n+2$ für $n \in \{1, 2, 3\}$.

Betrachten wir nun die nachstehenden Folgen den Ordinalzahlen:

1., 2., 3., 4., 5., 6.

2., 4., 1., 3., 6., 5.

so besagen beide, dass hier 6 verschiedene Objekte in 2 verschiedenen Reihenfolgen aufgeschrieben sind. Es ist also nicht so, dass einem bestimmten Objekt ein bestimmter Platz in einer Ordnung zukommt, denn n Objekte können ja auf n! Weisen permutiert werden.

Um jedoch eine bestimmte Reihenfolge zu verabsolutieren, und das bedeutet: um einem bestimmten Objekt einen bestimmten Platz in einer Ordnung zu geben, muss eine Identifikation zwischen Objekt und Platz stattfinden. Und hier gehen wir nun einen **2. Schritt** über die Kardinalzahlen hinaus. Indem wir nämlich einen Schritt über die Ordinalzahlen hinausgehen: Nummern sind eine spezielle Untergruppe von Ordinalzahlen, nämliche solche, die mit ihren Referenzobjekten identifiziert sind, z.B.

⨻ ⊕ ⨸ ⊙ ⊗ ⦵

≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡

1 2 3 4 5 6

So kann in der Reihenfolge

⨻ ⊕ ⨸ ⊙ ⊗ ⦵

das 1. Haus prinzipiell jedes Objekt sein, je nach der Position des Beobachters oder aufgrund von anderen Kriterien (z.B. das 1. Haus am Berg, das 2. Haus am Bach, das letzte Haus talauswärts, usw.)

Dagegen gilt: das Haus Nr. 1 ist immer (qua identischer Abbildung) das Hausobjekt ⨻, das Haus Nr. 3 ist immer ⨸, das „letzte“ Haus ist immer ⦵, usw.

Auch für Nummern gelten jedoch immer noch die zwei Peano-Gesetze für Ordinalzahlen:

1. $\sigma(n) = n + 1$

2. n < n+1 < n+2 für n ∈ {1, 2, 3},

denn wenn wir uns die Hausobjekte entlang einer Strasse denken, ist etwa die folgende Numerierung ausgeschlossen:

⨻	⊕	⨸
2	3	5
4	6	1

d.h. es sind nur stimmte Reihenfolgen zugelassen, z.B. gerade und ungerade gegenüber, gerade und ungerade auf je einer Seite, von vorn nach hinten/von hinten nach vorn (bzw. nach Paaren von Himmelsrichtungen), d.h. nur solche sind zugelassen, die den beiden Peano-Gesetzen nicht widersprechen.

4. Wenn wir nun noch einen **3. Schritt** machen, so können wir die Identifikation von Ordinalzahl und Platz aufheben, ohne dennoch jede Ordnungsstruktur zu eliminieren, nämlich indem wir die Objekte mit irgend einem anderen Referenzbereich identifizieren. Damit kommen wir also ins bisher mathematisch nicht untersuchte Gebiet zwischen Ordinalzahlen und Nummern.

Beispiele sind etwa Bus- und anderen Verkehrsmittellinien. So wird etwa festgesetzt, dass das 6er Tram von der Enge bis zum Zoo auf dem Zürichberg fährt, der 13-er dagegen fährt vom Albisgüetli nach Frankental in Höngg. Hier befindet man sich also in einer sympathetischen Nähe zu anderen, relativ freien Zahlverwendungen: der 8-Uhr-Zug, das 9-Uhr-Postauto (womit allerdings der Referenzbereich des Verkehrsstrecke und damit die „-er"-Nummern bereits vorausgesetzt werden, dann es gibt ja z.B. je nach Busnummer verschiedene Busse, die um 9 Uhr von einer bestimmten Station abfahren), dann die Kleidergrössen: Es gibt Leute, für die M oder L reicht, dann gibt es solche, deren Grösse bis 5X oder noch höher geht. Wenn wir also glauben, mit den aufgezählten Beispielen den Bereich der seltsamen Zahlen zwischen Nummern und Ordinalzahlen ungefähr abgesteckt (wenn auch keinesweges erschöpfend aufgezählt) zu haben, dann haben wir also

- die „-er“ Nummern: Einser, Zweier, Dreier, ..., n-er (Referenzbereich: lokal/direktional)[1]

- die Zeitangaben-Nummern: der 5-Uhr-Zug, das 6-Uhr-Postauto, dass 11 Uhr-Schiff (sogar nicht-numerisch: der Nachtschnellzug, das Frühstücksschiff, das Nachmittagstram; das 3-Minuten-Ei, der 5-Uhr-Tee, das Mitternachts-mümpfeli, usw.) (Referenzbereich: temporal)

- die Grössen: eigenes Zahlensystem, jedoch verschieden nach Ländern, z.B. M, L, X, XL, XXL, ..., 5 X in Europa

Was wir bei diesen „Zwischenzahlen“ also feststellen, ist zweierlei: 1. sie kommen den Massen teilweise recht nahe; 2. es bahnt sich bei ihnen ein Übergang von der reinen Quantität über die Zwischenstufen der Quanti-Qualität bzw. Quanti-Qualität zur reinen Qualität an.

5. Damit bekommen wir eine fundamentale Unterscheidung von Zahlen, die viel präziser ist als die überkommene von Kardinal- und Ordinalzahlen. Von den heir behandelten „Übergangszahlen“ bilden die Bus- und anderen Nummern eine Zwischenschicht zwischen Ordinalzahlen und Nummern und die Nummern selber eine solche zwischen Zahlen und Zeichen, denn bei ersteren wird nur ein Referenzbereich relativ lose als Ordnungsstruktur mit dem Kardinalzahlbegriff assoziiert, bei letzteren jedoch geschieht die Identifikation zwischen Ordinalzahl und Referenzobjekt. Wir können somit das auf ganz anderem Wege gewonnene Hauptresultat unserer letzten Studie (Toth 2011) bestätigen: Zahlen sind eine Sonderform von Zeichen, wobei die Kardinalzahlen sich beinahe wie Objekte und die Nummern sich fast wie Zeichen verhalten. Damit ist dann ungefähr der Bereich zwischen Quantität (Kardinalzahlen) und Qualität (Nummern) abgesteckt, und die dazwischen

1 Im Ung. bekommen z.B. Busnummern das Suffix –es, das an den Kardinalzahlstamm gehängt wird: az egyes, kettes, harmas, ..., (busz/villamos), während die Ordinzahlendung, ebenfalls an den Kardinalzahlstamm angehängt –ik ist: a harmadik, negyedik, ötödik, ..., (busz/villamos) („erster“ = első, „zweiter“ = második, lit. „ander-„). So bedeutet also a hatodik villamos das dritte Tram – un zwar ohne Berücksichtigung der gleichen Tramnummer´, während a hetes villamos das Tram Nr. 3 bedeutet. Daher ist also a hetedik hegyes der „3. Dreier“, d.h also das dritte gleiche (nämlich die Nummer 3 tragende) Tram (das in einer bestimmten Zeit an mir als Beobachter vorbeifährt).

befindlichen Zahlenarten bilden quali-quantitative bzw. quanti-qualitative Übergangssysteme.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Toth, Alfred, Bestimmte und unbestimmte Hintergründe von Zahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

16.2.2011